Option M

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

1975

DURÉE : 4 heures

PREMIÈRE PARTIE

V désigne un espace vectoriel euclidien de dimension finie n sur $\mathbf{R}$.

On note $(x \mid y)$ le produit scalaire.

$\mathcal{L}(V)$ désigne l'anneau des endomorphismes de V.

Si u appartient à $\mathcal{L}(V)$, on note Ker u son noyau et Im u son image.

On dira que u est *antisymétrique* si pour tout x et tout y de V on a la relation :

$$(u(x) \mid y) = -(x \mid u(y))$$

On note $\mathcal{A}(V)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de V. On rappelle qu'une matrice carrée à coefficients réels a_{ij} est dite antisymétrique si pour tout i et tout j de l'intervalle $[1, n]$ des entiers, on a :

$$a_{ji} = -a_{ij}$$

1° Soit u un élément de $\mathcal{L}(V)$. Montrer que u appartient à $\mathcal{A}(V)$ si et seulement si pour toute base orthonormée de V, la matrice représentative de u est antisymétrique.

Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{A}(V)$?

2° Soit u un élément de $\mathcal{A}(V)$. Montrer que le rang de u est un nombre pair et que les sous-espaces vectoriels Im u et Ker u sont supplémentaires et orthogonaux.

3° Soit u un élément de $\mathcal{A}(V)$. Montrer que u^2 est diagonalisable. Soit λ une valeur propre de u^2 et W_λ le sous-espace propre correspondant de u^2. Montrer la relation

$$u(W_\lambda) \subseteq W_\lambda .$$

En déduire qu'il existe une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de V; un entier p tel que $2p \leqslant n$ et des nombres réels non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ tels que :

$$u(e_{2k-1}) = \alpha_k e_{2k} \quad \text{et} \quad u(e_{2k}) = -\alpha_k e_{2k-1} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, p$$
$$\text{et} \quad u(e_i) = 0 \qquad \text{pour} \qquad i = 2p+1,\ 2p+2,\ \ldots,\ n$$

4° On suppose $n = 4$ et on considère l'élément u de $\mathcal{A}(V)$ représenté dans une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ par la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & \beta \\ -\alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \alpha \\ -\beta & 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Déterminer en fonction des ε_i une base (e_1, e_2, e_3, e_4) vérifiant les conditions de la question précédente.

DEUXIÈME PARTIE

On conserve les notations de la première partie mais on suppose que V est de dimension 4 et qu'une orientation a été choisie.

On note $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ le *produit mixte* de quatre éléments de V et $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ le *produit vectoriel* de trois éléments qui est, rappelons-le, l'unique élément y de V tel que l'égalité

$$(y \mid z) = [x_1, x_2, x_3, z]$$

soit vérifiée pour tout z appartenant à V.

Si a et b sont deux éléments de V, on note $U(a, b)$ l'application de V dans lui-même définie par

$$\forall x \in V \quad ; \quad U(a, b)(x) = a \wedge b \wedge x .$$

1° Montrer que $U(a, b)$ est un élément de $\mathcal{A}(V)$ et que l'application ainsi définie de V^2 dans $\mathcal{A}(V)$ est bilinéaire. Caractériser les couples (a, b) de V^2 pour lesquels $U(a, b) \neq 0$.

2° On suppose a élément non nul de V. Quel est le rang de l'application linéaire de V dans $\mathcal{A}(V)$ qui à b associe $U(a, b)$?

3° Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base quelconque de V. Montrer que les éléments de $\mathcal{A}(V)$: $U(e_i, e_j)$ $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ sont linéairement indépendants.

Peut-on en déduire que U applique V^2 sur $\mathcal{A}(V)$? Justifier la réponse.

4° Soit u un élément non nul de $\mathcal{A}b(V)$. Montrer qu'il existe un couple (a, b) appartenant à V^2 tel que

$$U(a, b) = u$$

si et seulement si le rang de u est égal à 2.

Dans la suite du problème on désigne par $\mathcal{A}b_2(V)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}b(V)$ dont le rang est 2.

5° Soit u un élément de $\mathcal{A}b_2(V)$. On se propose d'étudier les couples (a, b) de V^2 tels que

$$u = U(a, b) .$$

(i) Montrer que a et b appartiennent nécessairement à un sous-espace vectoriel H de V dont la dimension est 2.

(ii) Soit a non nul appartenant à H. Montrer qu'il existe b appartenant à H tel que

$$u = U(a, b) .$$

b est-il unique ? Peut-on choisir b orthogonal à a ?

6° Montrer que tout élément u de $\mathcal{A}b(V)$ est la somme de deux éléments de $\mathcal{A}b_2(V)$.

7° On considère dans V une base orthonormée *directe* (e_1, e_2, e_3, e_4). Les composantes d'un élément de V par rapport à cette base seront notées $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$. On pose :

$$u = U(e_1, e_2) - 2U(e_2, e_3) + U(e_3, e_4) - 2U(e_4, e_1) .$$

Écrire la matrice représentative de u dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4). On considère la partie K de V définie par les égalités

$$\begin{cases} \xi_3 = 0 \\ \xi_1 + \xi_4 = 1 \end{cases}$$

Déterminer quatre éléments a, b, c, d de V deux à deux orthogonaux tels que a et c appartiennent à K et

$$u = U(a, b) + U(c, d) .$$

TROISIÈME PARTIE

On conserve les notations et les hypothèses de la deuxième partie. V est donc un espace euclidien de dimension 4.

Soit w un élément de V et u un élément de $\mathcal{A}b(V)$. On définit deux applications de V dans lui-même par les formules

$$\forall x \in V \quad ; \quad \mathfrak{M}(x) = w + u(x)$$
$$\forall x \in V \quad ; \quad \mathfrak{N}(x) = x + \mathfrak{M}(x) .$$

On dit qu'une variété linéaire affine G de V est *stable* pour $\mathfrak{N}$ si on a la relation

$$\mathfrak{N}(G) \subseteq G .$$

1° Montrer que pour tout couple (x, y) d'éléments de V, on a

$$(\mathfrak{M}(x) \mid x - y) = (\mathfrak{M}(y) \mid x - y) .$$

2° Montrer que $\mathfrak{N}$ est une bijection de V.

3° Caractériser les variétés linéaires affines stables pour $\mathfrak{N}$ lorsque $u = 0$.

4° On suppose dans cette question que u est de rang 4. Montrer qu'il existe dans V un élément unique x_0 tel que

$$\mathfrak{N}(x_0) = x_0 .$$

En déduire qu'il existe au moins 2 variétés linéaires affines de dimension 2 stables pour $\mathfrak{N}$.

5° On suppose dans cette question et les suivantes que u appartient à $\mathcal{A}b_2(V)$. Montrer qu'il existe une variété linéaire affine de dimension 2 parallèle à Ker u qui est stable pour $\mathfrak{N}$ et que cette variété est unique. Dans la suite du problème on la note H_0.

Montrer que la projection orthogonale de $\mathfrak{M}(x)$ sur H_0 est indépendante de x.

6° Montrer que toute variété linéaire affine de dimension 3 stable pour $\mathfrak{N}$ est parallèle à Im u. En déduire que de telles variétés existent et les caractériser. Discuter.

7° Soit G une variété linéaire affine de dimension 3 stable pour $\mathfrak{N}$. Montrer que la restriction de $\mathfrak{M}$ à G peut être considérée comme un torseur non constant.

Caractériser l'axe central de ce torseur. Dans quel cas est-ce un glisseur ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail